Ueber das

Potential des Kreises

und

der Kugelfläche.

INAUGURAL-DISSERTATION,

welche

mit Genehmigung der philosophischen Facultät zu Marburg zur Erlangung der Doctorwürde

einreicht

Heinrich Conrad Kessler

aus Marburg,

Lehrer an der Realschule zu Hanau.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

Marburg.

Druck von Joh. Aug. Koch.

1856.

I.

Ueber das Potential im Allgemeinen.

Unter dem Potentiale einer Masse M in Bezug auf einen von derselben angezogenen oder von ihr abgestossenen Punkt A versteht man nach *Gauss* *) die Summe aller Elemente der Masse, jedes dividirt durch seine Entfernung von jenem Punkte. Bezeichnet daher μ irgend eines dieser Massenelemente und u seine Entfernung von A, so ist der Werth des Potentials V gegeben durch die Gleichung

$$V = \Sigma\left(\frac{\mu}{u}\right)$$

In Rücksicht auf die Art und Weise, wie die Masse vertheilt sein kann, sind vier Fälle möglich. Sie kann nämlich vertheilt sein auf discrete Punkte, auf eine Linie, auf eine Fläche oder in einem körperlichen Raume. Obgleich der letztere Fall der einzige in der Natur vorkommende ist, so zieht man dennoch auch die übrigen als ideelle Fälle in Betracht. Es steht nämlich kein Hinderniss im Wege, sich eine gewisse Masse in einen mathematischen Punkt concentrirt zu denken und indem man eine Linie oder Fläche als den Inbegriff von Punkten ansieht, solche mit Masse erfüllte (materielle) Punkte in continuirlicher Folge zu Linien und Flächen zusammenzureihen. Unter der Dichtigkeit in einem Punkte einer solchen materiellen Linie oder Fläche versteht man aber alsdann den Quotienten aus der Masse des an jenem Punkte liegenden Linien- oder Flächenelementes durch die Grösse dieses Elementes selbst. Diese Erklärung harmonirt mit jener, die man von der Dichtigkeit in einem Punkte eines mit Masse erfüllten körperlichen Raumes gibt.

---

*) S. Gauss „Allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- oder Abstossungskräfte", in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins von 1839. S. 1 u. w.

1) In dem Falle, dass die Masse über discrete Punkte vertheilt ist, liefert die obige Formel den Werth des Potentiales unmittelbar; in den drei übrigen Fällen aber tritt an die Stelle der Summation eine einfache, zweifache oder dreifache Integration. Beziehen wir nämlich für diese Fälle die wirkende Masse M und den Punkt A, auf welchen sie wirkt, auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, bezeichnen die Coordinaten des Punktes A mit x, y, z, die eines beliebigen Punktes von M mit α, β, γ und die Dichtigkeit, welche in diesem Punkte stattfindet, mit ϱ, so ist das Bogenelement ds einer Linie im Raume

$$ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2} \cdot d\alpha$$

und die Masse desselben ϱds, seine Entfernung von A aber

$$u = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}.$$

Daher ist das Potential der Linie, wenn wir α als independente Variabele annehmen, und α_0 und α_1 die Abscissen ihrer Grenzpunkte sind,

$$V = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\varrho \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\alpha}\right)^2}}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \cdot d\alpha.$$

Ferner ist das Element einer Fläche im Punkte (α, β, γ)

$$d\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\right)^2} \cdot d\alpha d\beta$$

und seine Masse $\varrho d\omega$, mithin das Potential einer Fläche in Bezug auf den Punkt A

$$V = \iint \frac{\varrho \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\right)^2}}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} \cdot d\alpha d\beta,$$

wobei die Grenzen so zu wählen sind, dass das Integral sich über alle Elemente der Fläche erstreckt.

Endlich ist das Element eines Volumens $d\alpha d\beta d\gamma$ und seine Masse $\varrho d\alpha d\beta d\gamma$, mithin das Potential der in dem Volumen enthaltenen Masse in Bezug auf A

$$V = \iiint \frac{\varrho d\alpha d\beta d\gamma}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}},$$

wobei die Integrationen über alle Elemente des Volumens auszudehnen sind.

2) Denkt man sich die Integrationen ausgeführt, so fallen die Grössen α, β, γ heraus, und es erscheint das Potential im Allgemeinen als eine Function von den Coordinaten x, y, z des Punktes A, während die Grössen, welche die Lage dieses Punktes gegen die anziehende Masse, sowie die, welche deren Dimensionen bestimmen, darin die Rolle von Constanten spielen.

Die partiellen Differentialquotienten des Potentials, genommen nach x, y, z, nämlich die Grössen

$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

liefern alsdann die Componenten X, Y, Z der Wirkung (Attraction oder Repulsion) der Masse M auf den Punkt A, parallel den Axen der x, y, z. Die Intensität R ihrer Resultante ergibt sich hieraus als

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Reducirt sich V auf eine Constante, so werden $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ und in Folge dessen auch

$$R = 0$$

Dann befindet sich der Punkt A im Gleichgewicht.

3) Der geometrische Ort aller Punkte des Raumes, in Bezug auf welche das Potential einer Masse M denselben Werth k hat, wird eine Gleichgewichts- oder Niveaufläche der Masse M genannt. Die Beschaffenheit dieser Fläche hängt von den geometrischen und mechanischen Eigenschaften der Masse, d. h. von ihrer Form und Dichtigkeit, ausserdem aber nur von der Constanten k ab. Legt man nun der Grösse k alle denkbaren Werthe bei, so erhält man die Schaar aller möglichen Niveauflächen, die ein und derselben Masse angehören.

Jede auf einer Niveaufläche liegende Curve möge eine Niveaulinie heissen. Schreitet man auf einer solchen Linie von einem Punkte zu dem nächst anliegenden fort, so ändert V seinen Werth nicht, weil es für alle Punkte der Niveaufläche denselben Werth hat; es ist daher, wenn man den Bogen dieser Niveaulinie mit s bezeichnet, der Differentialquotient von V in Bezug auf s genommen der Null gleich, d. h.

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

Da aber V eine Function von x, y, z ist, so wird

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Die hierin vorkommenden Differentialquotienten $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind nun die Cosinusse der Winkel, welche das Bogenelement ds der Linie s in dem betrachteten Punkte A mit den Axen der x, y, z bildet; die partiellen Differentialquotienten von V aber bedeuten die Componenten X, Y, Z der Wirkung der Masse auf den Punkt A. Bezeichnen wir also jene Winkel mit λ, μ, ν, so erhalten wir

$$\frac{dV}{ds} = X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu$$

d. h. $\frac{dV}{ds}$ ist die Summe der Projectionen der Componenten X, Y, Z auf die Richtung von ds oder auf die Tangente der Niveaulinie im Punkte A. Diese Summe ist aber nach einem bekannten Satze der Statik gleich der Projection der Resultante R auf dieselbe Richtung. Ist daher ω der Winkel, welchen die Resultante mit ds bildet, so erhält man

$$\frac{dV}{ds} = R\cos\omega$$

und da

$$\frac{dV}{ds} = 0$$

ist,

$$R\cos\omega = 0.$$

Im Allgemeinen ist nun die Resultante R nicht Null, daher muss $\cos\omega = 0$ und mithin $\omega = \frac{\pi}{2}$ sein. Wenn also in irgend einen Punkte A die Resultante der Wirkung der Masse M nicht verschwindet, so bildet sie mit der Tangente einer beliebigen durch A gehenden Niveaulinie, mithin mit den Tangenten aller solcher Linien rechte Winkel und steht also senkrecht auf der Ebene aller dieser Tangenten d. i. auf der Tangentenebene der Niveaufläche im Punkte A.

Ist daher der Punkt A genöthigt auf der Niveaufläche zu bleiben, so befindet er sich im Gleichgewicht, indem der Widerstand der Fläche die Resultante R aufhebt. Die Richtung der Resultante, welche nach dem eben Entwickelten senkrecht zur Niveaufläche ist, geht nach der Masse hin, wenn die Masse anziehend, von ihr weg, wenn sie abstossend wirkt. Zum wirklichen Gleichgewichte des Punktes A auf

der Niveaufläche, wenn solches durch den Widerstand der Fläche herbeigeführt werden soll, ist daher noch erforderlich, dass im ersten Falle sich Masse und Punkt auf entgegengesetzen Seiten, im zweiten Falle auf derselben Seite der Niveaufläche befinden müssen.

4) Im Folgenden möge das Potential einer Kreislinie und einer Kreisfläche in Bezug auf einen in ihrer Ebene liegenden Punkt, sowie das Potential der Kugelfläche in Bezug auf irgend einen Punkt des Raumes entwickelt und daran einige Betrachtungen über die Anziehung solcher Massen geknüpft werden. Die Bestimmung des Potentials einer Kreislinie und Kreisfläche in Bezug auf einen beliebigen Punkt des Raumes ist mit so bedeutenden Schwierigkeiten verbunden, dass ich, um nicht ein meine Kräfte übersteigendes Problem zu versuchen, die Lage des Punktes auf die Ebene des Kreises beschränken zu müssen glaubte.

II.

Ueber das Potential der Kreislinie in Bezug auf irgend einen Punkt ihrer Ebene.

Es sei $D'MDN$ (Fig. 1) eine materielle Kreislinie, deren Dichtigkeit ϱ in allen Punkten denselben constanten Werth besitze. Die Masse dieser Linie ziehe irgend einen Punkt A an; man verlangt das Potential V derselben in Bezug auf diesen Punkt. Hinsichtlich der Lage, welche A gegen die Kreislinie haben kann, sind drei Fälle sorgfältig von einander zu unterscheiden. Derselbe kann nämlich ausserhalb oder innerhalb der Kreislinie oder endlich auf dem Umfange liegen.

1) Nehmen wir zunächst an, der Punkt A liege ausserhalb. Durch diesen Punkt und den Mittelpunkt C des Kreises legen wir eine Grade, welche den Kreis in den beiden Punkten D und D' treffen wird; D sei der dem Punkte A zunächstliegende. Die Entfernung AC möge mit e, der Radius des Kreises mit a bezeichnet werden; der Voraussetzung zufolge ist dann $e > a$. Sind nun M, M' zwei unendlich nahe Punkte der Kreislinie, ds das Bogenelement MM' und u die Entfernung des Punktes M von A, so ist ϱds die Masse dieses Bogenelementes und

$$\frac{\varrho ds}{u}$$

sein Potential in Bezug auf den Punkt A. Das Integral dieses Ausdruckes über alle Elemente des Kreises erstreckt, ist das gesuchte Potential V, nämlich

$$(1) \qquad V = \int \frac{\varrho ds}{u}$$

Der Werth dieses Integrals wird durch ein *vollständiges elliptisches Integral der ersten Gattung* angegeben. Um zu demselben ohne weitläufige Transformationen zu gelangen, ziehen wir von D nach dem Punkte M die Grade DM, setzen $\angle D'DM = \vartheta$ und wählen diesen Winkel zur independenten Variabelen. Die Drehungsrichtung dieses Winkels werde so bestimmt, dass $\vartheta = 0$, wenn M mit D' und $= \frac{\pi}{2}$, wenn M mit D zusammenfällt. Lässt man alsdann ϑ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ wachsen, so erreicht der Radiusvector DM alle Punkte des Kreisumfangs. Zieht man nun nach dem dem Punkte M benachbarten Punkte M' den Radiusvector DM', so wird $\angle MDM' = d\vartheta$ und der mit ihm über demselben Bogen MM' stehende Centriwinkel $MCM' = 2d\vartheta$, und mit dessen Hülfe ergibt sich das Bogenelement als

$$ds = 2ad\vartheta.$$

Um nun die Entfernung $AM = u$ gleichfalls durch ϑ auszudrücken, betrachten wir das Dreieck $D'MA$, in welchem $\angle MD'A$ $= \frac{\pi}{2} - \vartheta$, $D'M = 2a \sin \vartheta$, $AD' = e + a$ und

$$AM^2 = AD'^2 + MD'^2 - 2AD' \cdot MD' \cdot \cos MD'A$$

ist. Diese Gleichung liefert daher

$$u^2 = (e+a)^2 + (2a \sin \vartheta)^2 - 2(e+a) \cdot 2a \sin \vartheta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

woraus nach leichter Reduction wird:

$$u^2 = (e+a)^2 - 4ea \sin^2\vartheta = (e+a)^2 \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{ea}}{e+a}\right)^2 \cdot \sin^2\vartheta\right]$$

Setzt man hierin abkürzend

$$\frac{2\sqrt{ea}}{e+a} = k$$

und zieht auf beiden Seiten die Wurzel aus, so folgt

$$u = (e + a)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}$$

Die Grösse k ist kleiner als 1; denn es ist

$$e + a - 2\sqrt{ea} = (\sqrt{e} - \sqrt{a})^2$$

also positiv, mithin

$$2\sqrt{ea} < e + a$$

und folglich, wenn man diese Ungleichung beiderseits mit $e + a$ dividirt

$$\frac{2\sqrt{ea}}{e + a} < 1.$$

Substituirt man nun die gefundenen Werthe für ds und u in das obige Integral (1) und integrirt zwischen den Grenzen $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$V = \frac{2a\varrho}{e + a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \text{ wo } k = \frac{2\sqrt{ea}}{e + a}$$

Da aber die Grösse $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$ innerhalb des Intervalls von $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ bis $\vartheta = 0$ ganz dieselben Werthe annimmt, wie zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$, so wird nach einem bekannten Satze der Integralrechnung

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

und folglich

$$(2) \qquad V = \frac{4a\varrho}{e + a} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

Das hierin vorkommende Integral ist ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung vom Modulus k und wird nach *Legendre* mit

$$F^1(k)^*)$$

bezeichnet. Führt man diese Bezeichnung ein und restituirt für k seinen Werth, so nimmt V folgende Gestalt an:

$$V = \frac{4a\varrho}{e+a} \cdot F^1\left(\frac{2\sqrt{ea}}{e+a}\right)$$

Mit Hülfe der *Landen'schen* Substitution kann man dieses elliptische Integral in ein anderes von einfacherem Modulus umformen. Es ist nämlich, wenn die Moduli s, r und die Amplituden Ω und Θ durch die Gleichungen

$$\sin(2\Omega - \Theta) = r \sin \Theta$$

$$s = \frac{2\sqrt{r}}{1+r}$$

verbunden sind

$$F(s, \Omega) = \frac{1+r}{2} F(r, \Theta)^{**})$$

Die erstere Gleichung wird erfüllt für $\Omega = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = \pi$ und zwar für jeden Werth von r. Für diese Werthe geht diese Gleichung über in

$$F^1(s) = \frac{1+r}{2} \cdot F(r, \pi)$$

Nun ist aber

$$F(r, \pi) = \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta}}$$

---

*) Nach Legendre's Bezeichnung ist nämlich

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} = F(k, \varphi)$$

und wenn die obere Grenze $\frac{\pi}{2}$ ist, in welchem Falle das Integral ein vollständiges heisst

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} = F^1(k)$$

so dass also $F^1(k)$ soviel bedeutet als $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$

**) S. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, S. 384.

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta}} = 2\,F'(r),$$

weil $\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta}}$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe hat, wie zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. Daher erhält man weiter

$$F'(s) = \frac{1+r}{2} \cdot 2\,F'(r)$$

oder

$$F'(s) = (1+r)\,F'(r)$$

Dies ist die *Landen*'sche Relation für die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, wenn zwischen den Modulis s und r die Gleichung besteht

$$s = \frac{2\sqrt{r}}{1+r}$$

Wenden wir diese Gleichung auf den vorliegenden Fall für

$$s = \frac{2\sqrt{ea}}{e+a} = \frac{2\sqrt{\frac{a}{e}}}{1+\frac{a}{e}}$$

an, so haben wir nur an die Stelle von r die Grösse $\frac{a}{e}$ zu setzen. Dadurch erhalten wir

$$F'\left(\frac{2\sqrt{ea}}{e+a}\right) = \left(1 + \frac{a}{e}\right) F'\left(\frac{a}{e}\right) = \frac{e+a}{e} \cdot F'\left(\frac{a}{e}\right)$$

und hierdurch geht der Ausdruck für das Potential über in

$$(3) \qquad V = 4\varrho \cdot \left(\frac{a}{e}\right) \cdot F'\left(\frac{a}{e}\right), \quad e > a.$$

2) Liegt der angezogene Punkt im Innern des Kreises, so zeigt eine leichte Betrachtung, dass der ganze für den ersten Fall entwickelte Calcul auch hier noch seine Gültigkeit behält bis zur Anwendung der *Landen*'schen Substitution. Da nämlich der Modulus eines elliptischen Integrales immer kleiner als Eins ist, in dem vorliegenden Fall aber $a > e$, also $\frac{a}{e} > 1$ ausfällt, so kann man für den neu einzuführenden Modulus nicht $\frac{a}{e}$ in Anwendung bringen,

sondern nur $\frac{e}{a}$, d. h. man muss

$$s = \frac{2\sqrt{ea}}{e+a} = \frac{2\sqrt{\frac{e}{a}}}{1+\frac{e}{a}}$$

setzen. Dadurch wird

$$F^1\left(\frac{2\sqrt{ea}}{e+a}\right) = \left(1 + \frac{e}{a}\right) F^1\left(\frac{e}{a}\right)$$

und folglich

$$(4) \qquad V = 4\varrho \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right), \quad e < a.$$

3) Die beiden Formeln

$$V = 4\varrho \,.\, \left(\frac{a}{e}\right) . F^1\left(\frac{a}{e}\right) \qquad e > a$$

$$V = 4\varrho \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right) \qquad e < a$$

sind beide in der allgemeinen

$$(5) \qquad V = \frac{4\varrho a}{e+a} F^1\left(\frac{2\sqrt{ea}}{e+a}\right)$$

enthalten, eignen sich aber zur numerischen Berechnuug des Potentials, wenn e und a gegeben sind, besser, als diese. Man hat nämlich für $k < 1$

$$F^1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, (1 - k^2 \sin^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \,.\, \left\{1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2\vartheta + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4\vartheta + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \sin^6\vartheta + \ldots\right\}$$

Da nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\vartheta d\vartheta = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ist, so erhält man für $F^1(k)$ die unendliche Reihe

$$(6) \qquad F^1(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\ldots\right\}$$

und indem man diese das einemal für $k = \frac{a}{e}$, das anderemal für $k = \frac{e}{a}$ in Anwendung bringt, für den Fall eines äusseren Punktes

$$(7) \quad V = 2\pi\varrho \cdot \left(\frac{a}{e}\right) \cdot \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a}{e}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{e}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{a}{e}\right)^6 + \ldots\ldots\right\}$$

$$e > a$$

dagegen für einen innern Punkt

$$(8) \quad V = 2\pi\varrho \cdot \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{e}{a}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{e}{a}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{e}{a}\right)^6 + \ldots\ldots\right\}$$

$$e < a$$

Die erstere dieser Formeln entwickelt V nach fallenden, die zweite nach steigenden Potenzen von e^2 in rasch convergirende Reihen. Die Glieder dieser Reihen nehmen nämlich schneller ab, als die Glieder geometrischen Progressionen:

$$1 + \left(\frac{a}{e}\right)^2 + \left(\frac{a}{e}\right)^4 + \left(\frac{a}{e}\right)^6 + \ldots\ldots$$

und

$$1 + \left(\frac{e}{a}\right)^2 + \left(\frac{e}{a}\right)^4 + \left(\frac{e}{a}\right)^6 + \ldots\ldots$$

Es sei z. B. das Potential der Kreislinie für einen äusseren Punkt in dem Falle zu entwickeln, dass dessen Entfernung vom Mittelpunkte das Vierfache des Radius ist. Man hat hierfür $\frac{a}{e} = \frac{1}{4}$, mithin nach Formel (7)

$$V = \frac{1}{2}\pi\varrho\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \ldots\right]$$

$$= 1{,}595429\ldots\ldots\varrho$$

Ebenso ist das Potential für einen innern Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte der vierte Theil des Radius ist, wo also $\frac{e}{a} = \frac{1}{4}$, nach Formel (8)

$$V = 1\pi\varrho\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \ldots\right]$$

$$= 6{,}381718\ldots\ldots\varrho$$

4) Es bleibt nun noch der Fall zu erörtern übrig, bei welchem der Punkt A auf dem Umfange des Kreises selbst liegt. In diesem Falle ist $e = a$, und es geben beide Formeln für das Potential den gemeinschaftlichen Werth

$$V = 4\varrho \,.\, F^1(1)$$

Nun ist aber

$$F^1(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} = \left[l\,tg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = l\,tg\frac{\pi}{2} = \infty$$

Mithin ist in diesem Falle

$$V = \infty$$

Nachdem wir die allgemeinen Formeln für das Potential einer Kreislinie in Bezug auf einen äussern, einen innern oder auf einen auf dem Umfange gelegenen Punkt entwickelt haben, wollen wir aus diesen, unter Ausschliessung des letzteren Falles, noch folgende Folgerungen ziehen.

1) Der Werth des Potentials hängt nicht von der absoluten Grösse des Radius des Kreises und der Entfernung des angezogenen Punktes von dessen Mittelpunkt, sondern nur von dem Verhältniss beider Grössen ab; er bleibt also derselbe, so lange dies Verhältniss ungeändert bleibt.

2) Das Potential ist offenbar eine continuirliche Function der Entfernung e. Nun wird dasselbe, wenn der Punkt A in den Mittelpunkt des Kreises rückt gleich Null. Denn in diesem Fall ist $e = 0$,

$F^1(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \frac{\pi}{2}$; also nach der zweiten Formel

$$V = 2\pi\varrho \,.\, 0 = 0$$

Auf der Peripherie wird dasselbe aber unendlich. Lässt man daher in Gedanken den Punkt A vom Mittelpunkte bis auf die Peripherie rücken, so durchläuft das Potential continuirlich alle Werthe von 0 bis ∞. Entfernt sich der Punkt A von der Peripherie ins Unendliche, so nimmt der Werth des Potentials continuirlich von ∞ bis 0 ab.

Hieraus erhellt, dass die Potentiale von zwei Punkten, von welchen der eine ein innerer, der andere ein äusserer ist, möglicherweise gleiche Werthe annehmen können.

Um die Bedingsgleichung hierfür aufzufinden, mögen sich die Grössen V, e auf einen äusseren Punkt A, dagegen V', e' auf einen inneren Punkt A' beziehen; dann ist

$$V = 4\varrho \left(\frac{a}{e}\right) . F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

$$V' = 4\varrho . F^1\left(\frac{e'}{a}\right)$$

Sollen diese Potentiale gleich sein, so hat man

$$\left(\frac{a}{e}\right) . F^1\left(\frac{a}{e}\right) = F^1\left(\frac{e'}{a}\right)$$

oder

$$F^1\left(\frac{a}{e}\right) : F^1\left(\frac{e'}{a}\right) = e : a$$

d. h. die Punkte A und A' müssen so liegen, dass, wenn man diejenigen Verhältnisse ihrer Abstände von dem Mittelpunkte des Kreises zu dessen Radius, welche kleiner als Eins sind, als Moduli von vollständigen elliptischen Integralen ansieht, das Integral, welches dem äusseren Punkt entspricht, sich zu demjenigen, welches dem inneren Punkt entspricht, verhält, wie der Abstand des inneren Punktes vom Mittelpunkt des Kreises zu dessen Radius.

3) Da der Radius a des Kreises constant ist, so bleibt der Werth des Potentials constant, so lange e dasselbe bleibt. Alle Punkte (äussere oder innere), welche in Bezug auf einen Kreis dasselbe Potential haben, liegen auf einem Kreisse, welcher mit dem gegebenen concentrisch ist. Die Niveaucurven sind also sämmtlich Kreise. Der Radius e' oder e eines solchen Niveaukreises, welcher einem constanten Werthe v des Potentials entspricht, ist für innere Potentiale aus der Gleichung

$$v = 4\varrho . F^1\left(\frac{e'}{a}\right),$$

für äussere Potentiale aus der Gleichung

$$v = 4\varrho . \left(\frac{a}{e}\right) . F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

zu berechnen. Man sieht, dass es immer zwei Kreise, einen innern und einen äussern gibt, auf welchen die Potentiale denselben gemein-

schaftlichen Werth v haben. Die Radien dieser Kreise e', e genügen der Bedingung

$$F^1\left(\frac{a}{e}\right) : F^1\left(\frac{e'}{a}\right) = e : a$$

Solche Kreise können zugeordnete genannt werden.

4) Was nun die Intensität und Richtung der Attraktionskraft betrifft, welche der Kreis auf einen Punkt A ausübt, so wollen wir durch den Mittelpunkt zwei zu einander senkrechte Coordinatenaxen der x, y legen. Die Coordinaten des Punktes A seien x, y. Dann sind die Componenten der Attraktion parallel diesen Axen

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

Nun ist aber

$$e^2 = x^2 + y^2$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y}$$

Die beiden letzteren Gleichungen gehen aber zufolge der ersteren, aus welcher

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{x}{e}, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{y}{e}$$

sich ergeben, über in

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e}$$

Daher werden die Componenten der Attraction

$$X = \frac{x}{e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e}, \quad Y = \frac{y}{e} \cdot \frac{\partial V}{\partial e}$$

und ihre Resultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{e^2}} \cdot \frac{\partial V}{\partial e} = \frac{\partial V}{\partial e}$$

Was die Richtung der Resultante betrifft, so ist dieselbe normal zur Niveaucurve und geht, da diese ein mit dem anziehenden concentrischer Kreis ist, durch dessen Mittelpunkt.

5) Es kann nun gefragt werden, welche Masse man in den Mittelpunkt des Kreises bringen müsse, damit dieselbe den Punkt A ebenso stark anzieht, als es die auf der Peripherie befindliche Masse thut. Diese Frage kommt darauf hinaus, die Masse zu bestimmen, welche in den Mittelpunkt gebracht in Bezug auf A ein ebenso grosses Po-

tential liefert, als das Potential der Kreislinie in Bezug auf A ist. Denn 2 Massen, welche gleiche Potentiale in Bezug auf ein und denselben Punkt haben, üben auf diesen gleiche Wirkung aus.

Bringen wir die Masse M in den Mittelpunkt der Kreislinie, so ist ihr Potential in Bezug auf den in der Entfernung e befindlichen Punkt A

$$\frac{M}{e}.$$

Das Potential der Kreislinie ist aber, wenn A ein innerer Punkt ist

$$4\varrho \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right)$$

und wenn er ein äusserer Punkt ist

$$4\varrho \,.\, \frac{a}{e} \,.\, F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

Daher muss für einen inneren Punkt

$$\frac{M}{e} = 4\varrho \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right)$$

und für einen äussern

$$\frac{M}{e} = 4\varrho \,.\, \frac{a}{e} \,.\, F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

sein. Im ersten Falle wird

$$M = 4\varrho \,.\, e \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right)$$

im zweiten

$$M = 4\varrho a \,.\, F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

In keinem der beiden Fälle ist diese Masse gleich der des anziehenden Kreises; denn diese ist

$$m = 2\pi\varrho a.$$

Daher hat man für das Verhältniss jener zu dieser im ersten Falle

$$\frac{M}{m} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{e}{a}\right) \,.\, F^1\left(\frac{e}{a}\right)$$

im zweiten Falle

$$\frac{M}{m} = \frac{2}{\pi} \,.\, F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

6) Wir wollen jetzt zwei materielle Kreislinien betrachten, welche in einer Ebene liegen und auf denselben Punkt A dieser Ebene anziehend wirken. Diese beiden Kreise mögen ganz auseinander lie-

gen; ihre Mittelpunkte seien C, C', ihre Radien a, a' und die constante Dichtigkeit der auf ihnen vertheilten Massen ϱ; der Punkt A endlich werde ausserhalb beider befindlich gedacht und habe von den Mittelpunkten C, C' die Entfernungen e, e'.

Unter diesen Voraussetzungen sind die Potentiale der Kreise in Bezug auf A

$$V = 4\varrho \cdot \frac{a}{e} \cdot F^1\left(\frac{a}{e}\right)$$

$$V = 4\varrho \cdot \frac{a'}{e'} \cdot F^1\left(\frac{a'}{e'}\right)$$

Da diese Grössen dieselben Functionen von $\frac{a}{e}$ und $\frac{a'}{e'}$ sind, so können sie nur gleich werden, wenn

$$\frac{a}{e} = \frac{a'}{e'}$$

ist. Hieraus folgt

$$e : e' = a : a'.$$

Sucht man also einen äusseren Punkt A, in Bezug auf welchen beide Kreise gleiche äussere Potentiale haben, so muss er so liegen, dass seine Entfernungen von den Mittelpunkten C, C' sich verhalten, wie die Radien. Nun ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstände von 2 festen Punkten C, C' das constante Verhältniss $\frac{a}{a'}$ haben, ein Kreis, welcher die Centrale CC' in zwei Punkten Q, Q' nach demselben Verhältniss harmonisch theilt, nämlich so, dass

$$QC : QC' = Q'C : Q'C' = a : a'$$

ist. Daher ist also der geometrische Ort aller Punkte A, welche in Bezug auf 2 materielle Kreise von constanter Dichtigkeit gleiche äussere Potentiale haben, und also von beiden Kreisen gleich stark angezogen werden, ein Kreis, welcher die Centrale im Verhältniss der Radien harmonisch theilt.

Ein solcher Kreis möge Potentialkreis der gegebenen Kreise heissen. Derjenige Durchschnittspunkt dieses Kreises mit den Centralen CC', welcher zwischen C und C' fällt, ist offenbar ein Punkt, welcher sich in Folge der Anziehung beider Kreise im Gleichgewicht befindet. Der andere Durchschnittspunkt ist nur dann im Gleichgewicht, wenn der eine Kreis anziehend, der andere abstossend gedacht wird.

Sind drei ganz auseinander liegende Kreise von gleicher Dichte, den Mittelpunkten C, C', C'' und den Radien a, a', a'' gegeben, so erhält man 3 Potentialkreise. Schneiden sich nun zwei dieser Kreise in zwei Punkten, so haben diese Punkte gleiche Potentiale in Bezug auf alle 3 Kreise; daher müssen sie auch auf dem dritten Potentialkreise liegen und folglich haben die 3 Potentialkreise eine gemeinschaftliche Sehne.

Die beiden gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der 3 Potentialkreise haben gleiche Potentiale in Bezug auf alle drei Kreise und mögen die Potentialcentra der drei Kreise heissen. Von ihnen ist aber nur derjenige, welcher in das Innere des Dreiecks C, C', C'' fällt, ein Punkt, welcher in Folge der Anziehung der 3 Kreise im Gleichgewicht ist. Dieser Punkt wird von den 3 Kreisen nach deren Mittelpunkten C, C', C'' mit gleichen Kräften angezogen, Da nun ein Punkt, an welchem 3 gleiche Kräfte wirken, nur dann im Gleichgewicht ist, wenn die Richtungen dieser Kräfte unter einander Winkel von 120^0 bilden, so kann er immer leicht mit Hülfe dieser Eigenschaft construirt werden.

Die Aufgabe, in einem Dreieck $CC'C''$ einen Punkt A zu finden, so dass die drei Graden AC, AC', AC'' mit einander 3 gleiche Winkel von 120^0 bilden, wird so gelöst:

Man trage an die Linie CC' in C unter 120^0 eine Linie an, errichte auf ihr in C und auf CC' in deren Mitte ein Perpendikel. Der Durchschnittspunkt M dieser Perpendikel ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch C und C' geht und einen Peripheriewinkel von 120^0 fasst; daher ist $\angle\ CAC' = 120^0$. Führt man nun dieselbe Construction nochmals an der Linie CC'' aus, so wird auch $\angle\ CAC''$ und folglich auch $\angle\ CAC'' = 120^0$.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie die vorstehenden, lassen sich auch anstellen, wenn die 2 oder 3 Kreise ganz ineinander liegen; auch dann gibt es für innere Potentiale Potentialkreise und Potentialcentra.

III.

Das Potential der Kreisfläche.

Es seien um einen Punkt C mit den Radien a und b zwei Kreise beschrieben. Der zwischen beiden enthaltene Kreisring sei mit

Masse von der constanten Dichtigkeit ϱ erfüllt und ziehe irgend einen Punkt A seiner Ebene an; man sucht das Potential des Ringes in Bezug auf A.

Zerlegen wir den Ring in concentrische Zonen von verschwindender Breite. Die Radien einer solchen Elementarzone seien r und $r+dr$, dann ist, wenn ϑ in Bezug auf den Kreis vom Radius r ganz dieselbe Bedeutung hat, wie in der vorigen Untersuchung, das Flächenelement der Zone

$$d\omega = 2r \,.\, d\vartheta dr$$

und folglich seine Masse

$$\varrho d\omega = 2\varrho r \,.\, d\vartheta dr.$$

Die Entfernung des Punktes A von dem Elemente ist ebenso, wie früher

$$u = (e+r)\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{er}}{e+r}\right)^2 \sin^2\vartheta}$$

wenn e die Entfernung des Punktes A von dem Mittelpunkte C des Kreises bedeutet. Daher ist das Potential des Elementes

$$2\varrho \frac{r}{e+r} \cdot \frac{d\vartheta dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{er}}{e+r}\right)^2 \sin^2\vartheta}}$$

und wenn wir dies nach ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ integriren und das Resultat doppelt nehmen, so erhalten wir das Potential der zwischen den Radien r und $r+dr$ enthaltenen Elementarzone. Integriren wir hierauf nach r von $r = a$ bis $r = b$, so erhalten wir das gesuchte Potential V des Kreisringes, nämlich

$$V = 4\varrho \int_a^b \frac{rdr}{e+r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} \quad ; \quad k = \frac{2\sqrt{er}}{e+r}$$

Ist nun der Punkt A ein äusserer Punkt, so ist zufolge der Betrachtungen in der vorigen Untersuchung [cf. II, Formel (2) und (3)]

$$\frac{4r\varrho}{e+r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} = 4\varrho \,.\, \left(\frac{r}{e}\right) \,.\, F^1\left(\frac{r}{e}\right)$$

und mit Hülfe dieses Ausdrucks geht V über in

$$V = 4\varrho \int_a^b \left(\frac{r}{e}\right) . F^1\left(\frac{r}{e}\right) dr \quad , \quad \begin{matrix} e > a \\ > b \end{matrix}$$

Ist dagegen der Punkt A ein im inneren Hohlraume gelegener, so wird nach II, Formel (4)

$$\frac{4r\varrho}{e+r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\vartheta}} = 4\varrho . F^1\left(\frac{e}{r}\right)$$

mithin

$$V = 4\varrho \int_a^b F^1\left(\frac{e}{r}\right) dr \quad , \quad \begin{matrix} e < a \\ < b \end{matrix}$$

Nun ist nach II, Formel (6)

$$F^1\left(\frac{r}{e}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^6 + \ldots\ldots\right], \quad e > r$$

$$F^1\left(\frac{r}{e}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{e}{r}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots\ldots\right], \quad e < r$$

mithin erhält man für das Potential im ersten Falle

$$V = 2\pi\varrho \int_a^b \left[\left(\frac{r}{e}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^5 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{r}{e}\right)^7 + \ldots\ldots\right] dr \quad , \quad \begin{matrix} e > a \\ > b \end{matrix}$$

und im zweiten

$$V = 2\pi\varrho \int_a^b \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{e}{r}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{e}{a}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{e}{a}\right)^6 + \ldots\ldots\right] dr \quad , \quad \begin{matrix} e > a \\ > b \end{matrix}$$

oder weil

$$\int_a^b \left(\frac{r}{e}\right)^{2n+1} dr = \frac{e}{2(n+1)}\left[\left(\frac{b}{e}\right)^{2n+2} - \left(\frac{a}{e}\right)^{2n+2}\right]$$

$$\int_a^b \left(\frac{e}{a}\right)^{2n} dr = \frac{e}{2n-1} \quad \left[\left(\frac{e}{a}\right)^{2n-1} - \left(\frac{e}{b}\right)^{2n-1}\right]$$

ist, für einen äusseren Punkt

$$V = \vartheta\varrho e \cdot \Big[\frac{1}{1}\Big(\Big(\frac{b}{e}\Big)^2 - \Big(\frac{a}{e}\Big)^2\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{b}{e}\Big)^4 - \Big(\frac{a}{e}\Big)^4\Big)$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{b}{e}\Big)^6 - \Big(\frac{a}{e}\Big)^6\Big)$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{b}{e}\Big)^8 - \Big(\frac{a}{e}\Big)^8\Big)$$
$$+ \ldots\ldots \quad \Big], \qquad \begin{matrix} e > a \\ > b \end{matrix}$$

für einen inneren Punkt

$$V = 2\pi\varrho(b-a) + 2\pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{e}{a}\Big) - \Big(\frac{e}{b}\Big)\Big)$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{e}{a}\Big)^3 - \Big(\frac{e}{b}\Big)^3\Big)$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\cdot\Big(\Big(\frac{e}{a}\Big)^5 - \Big(\frac{e}{b}\Big)^5\Big)$$
$$+\frac{1}{7}\cdot\Big(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\Big)\cdot\Big(\Big(\frac{e}{a}\Big)^7 - \Big(\frac{e}{b}\Big)^7\Big)$$
$$+ \ldots\ldots \quad \Big], \qquad \begin{matrix} e < a \\ < b \end{matrix}$$

Aus der ersten dieser beiden Formeln erhält man für $a = 0$ das Potential eines vollen Kreises vom Radius b in Bezug auf einen äusseren Punkt, nämlich

$$V = \pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}\cdot\Big(\frac{b}{e}\Big)^2 + \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(\frac{b}{e}\Big)^4 + \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(\frac{b}{e}\Big)^6 + \frac{1}{4}\cdot\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\cdot\Big(\frac{b}{e}\Big)^8 + \ldots\Big], \qquad e > b$$

Dagegen kann die zweite Formel nicht dazu benutzt werden, das Potential eines vollen Kreises in Bezug auf einen inneren (also der anziehenden Masse selbst angehörenden) Punkt zu finden. Setzt man nämlich in dieser Formel $a = 0$, so wird

$$V = 2\pi\varrho b + 2\pi\varrho e \cdot \infty = \infty$$

Dieser offenbar falsche Werth hat folgenden Grund. Das Potential ist das Integral aller Massenelemente *dm*, jedes dividirt durch seine Entfernung r von dem angezogenen Punkte. Gehört nun der ange-

zogene Punkt selbst der Masse an, so haben die ihm benachbarten Massenelemente unendlich kleine Entfernungen von ihm, und da diese Entfernungen im Nenner vorkommen, so wird der Factor $\frac{1}{r}$ innerhalb der Grenzen der Integration unendlich. Es darf daher nach einem Satze der Integralrechnung in diesem Falle das bestimmte Integral nicht durch blose Einsetzung der Grenzen aus dem unbestimmten abgeleitet werden. Da dies aber in dem vorliegenden Falle geschehen ist, so ist es natürlich, dass ein falscher Werth zum Vorschein kam.

Uebrigens erledigt sich dieser Fall durch das Folgende.

Es sei $a < e < b$, d. h. es liege der Punkt A in der Masse des Kreisringes selbst. In diesem Falle zerlegen wir den Kreisring in drei Theile, nämlich in einen Ring, welcher die Radien a und $e - \varepsilon$ hat, einen andern mit den Radien b und $e + \varepsilon$, und einen dritten unendlich schmalen von den Radien $e - \varepsilon$ und $e + \varepsilon$, und bestimmen die Potentiale dieser drei Ringe in Bezug auf A. Die Summe ihrer Grenzwerthe für abnehmende ε ist alsdann das gesuchte Potential des ganzen Kreisrings bezüglich auf den inneren Punkt.

In Bezug auf den ersten Ring ist A ein äusserer Punkt, also ist sein Potential V' nach II, Formel (3)

$$V' = 4\varrho \int_a^{e-\varepsilon} \left(\frac{r}{e}\right) F^1\left(\frac{r}{e}\right) dr$$

In Bezug auf den zweiten Ring liegt A im inneren Hohlraum, daher sein Potential

$$V'' = 4\varrho \int_{e+\varepsilon}^{b} F^1\left(\frac{e}{r}\right) dr$$

Für den dritten Ring erhalten wir nach der allgemeinsten Formel [s. II, Formel (5)] dessen Potential

$$V''' = 4\varrho \int_{e-\varepsilon}^{e-\varepsilon} \frac{r\,dr}{e+r} \cdot F^1\left(\frac{2\sqrt{er}}{e+r}\right)$$

Lassen wir nun ε ohne Ende abnehmen, so erhalten wir

$$V = lim\,(V' + V'' + V''') = lim\,V' + lim\,V'' + lim\,V'''$$

Nun ist unmittelbar

$$lim\, V' = 4\varrho \int_a^e \left(\frac{r}{e}\right) . F^1\left(\frac{r}{e}\right) dr$$

$$= \pi\varrho e\left[\frac{1}{1} \cdot \left(1+\left(\frac{a}{e}\right)^2\right)+\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{a}{e}\right)^4\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{a}{e}\right)^6\right)+ \ldots\ldots\right]$$

und

$$lim\, V'' = 4\varrho \int_e^b F^1\left(\frac{e}{r}\right) dr$$

$$= 2\pi\varrho\,(b-e)$$
$$+ 2\pi\varrho e\left[\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{e}{b}\right)\right)+\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{e}{b}\right)^3\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{e}{b}\right)^5\right)+ \ldots..\right]$$

Die Aufsuchung von *lim V'''* aber gelingt auf folgende Weise:

Es ist

$$lim\, V''' = 4\varrho lim \int_{e-\varepsilon}^{e+\varepsilon} \frac{r\,dr}{e+r} . F^1\left(\frac{2\sqrt{er}}{e+r}\right)$$

$$= 4\varrho \cdot lim\,(2\varepsilon \cdot Q) = 0,$$

wo Q ein gewisser Mittelwerth von $\frac{r}{e+r} F^1\left(\frac{2\sqrt{er}}{e+r}\right)$ ist; nämlich nach dem Satze, dass ein bestimmtes Integral gleich ist dem Producte aus der Differenz der Grenzen multiplicirt mit einem gewissen Mittelwerthe der Function unter dem Integralzeichen, nämlich

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f[a+\lambda(b-a)]\,^*)$$

ist.

Daher bleibt also

$$V = lim\, V' + lim\, V''$$

---

*) cf. Schlömilch, Compendium, S. 288. Formel (6).

d. h.

$$V=\pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}\cdot\Big(1+\Big(\frac{a}{e}\Big)^2\Big)+\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{a}{e}\Big)^4\Big)$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{a}{e}\Big)^6\Big)+\ldots\ldots\Big]$$
$$+2\pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{e}{b}\Big)\Big)+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{e}{b}\Big)^3\Big)$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{e}{b}\Big)^5\Big)+\ldots..\Big]$$
$$+2\pi\varrho(b-e)$$

als Potential für den Fall, dass A in der Masse des anziehenden Rings liegt. Für $a=0$ erhält man hieraus das Potential des vollen Kreises in Bezug auf einen seiner Masse angehörenden vom Mittelpunkt um die Strecke e abstehenden Punkt A, nämlich

$$V=\pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\ldots\Big]$$
$$+2\pi\varrho e\Big[\frac{1}{1}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\Big(1-\frac{e}{b}\Big)+\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{e}{b}\Big)^3\Big)$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\cdot\Big(1-\Big(\frac{e}{b}\Big)^5\Big)+\ldots..\Big]$$
$$+2\pi\varrho(b-e).$$

IV.

Potential der Kugelfläche.

1) Auf einer Kugelfläche vom Radius r sei Masse von constanter Dichtigkeit ϱ vertheilt, welche einen Punkt A des Raumes anzieht. Dieser Punkt kann wieder drei verschiedene Lagen haben, nämlich ausserhalb der Kugel oder im inneren Hohlraume derselben oder auf ihrer Oberfläche. Sein Abstand vom Mittelpunkte C der Kugel sei e und es werde zunächst angenommen, es sei $e > r$ d. h. A liege im äusseren Raume. Nehmen wir nun auf der Kugelfläche einen beliebigen Punkt M an, ziehen von da nach dem Mittelpunkte C den Radius MC, bezeichnen den Winkel, welchen dieser mit der Linie CA bildet, nämlich den Winkel MCA mit ϑ und den Winkel, welchen die durch MC und CA gelegte Ebene mit einer festen Ebene bildet, mit φ, so ist das an M liegende Flächenelement

$$d\omega = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

und seine Entfernung u von A

$u = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er\cos\vartheta} = \sqrt{e^2 + r^2} \cdot \sqrt{1 - k^2\cos\vartheta}$, wo $k^2 = \frac{2er}{e^2 + r^2}$

Multiplicirt man nun $d\omega$ mit der Dichtigkeit ϱ und dividirt dies Product durch u, so erhält man das Potential des Elements $d\omega$ in Bezug auf A, nämlich

$$\frac{\varrho r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{e^2 + r^2} \cdot \sqrt{1 - k^2\cos\vartheta}}$$

und wenn man diesen Ausdruck nach φ zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, und nach ϑ zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ integrirt, wodurch man alle Elemente der Kugelfläche erreicht, so erhält man als Potential der Kugelfläche

$$V = \frac{\varrho r^2}{\sqrt{e^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\cos\vartheta}}$$

Die Ausführung der Integration nach φ liefert 2π, so dass also bleibt

$$V = \frac{2\pi\varrho r^2}{\sqrt{e^2 + r^2}} \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\cos\vartheta}}$$

Setzt man hierin $-\cos\vartheta = w$, wodurch $\sin\vartheta d\vartheta = dw$ und die neuen Grenzen -1 und $+1$ werden, so findet sich

$$\int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\cos\vartheta}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dw}{\sqrt{1 + k^2 w}}$$

Nun ist das allgemeine Integral

$$\int \frac{dw}{\sqrt{1 + k^2 w}} = \frac{2}{k^2}\sqrt{1 + k^2 w}$$

mithin, wenn man die Grenzen einsetzt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dw}{\sqrt{1 + k^2 w}} = \frac{2}{k^2}\left[\sqrt{1 + k^2} - \sqrt{1 - k^2}\right]$$

Da aber

$$k^2 = \frac{2er}{e^2 + r^2}$$

war, so wird

$$1 + k^2 = \frac{e^2 + r^2 + 2er}{e^2 + r^2} = \frac{(e + r)^2}{e^2 + r^2}$$

$$1 - k^2 = \frac{e^2 + r^2 - 2er}{e^2 + r^2} = \frac{(e - r)^2}{e^2 + r^2}$$

$$(1 + k^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{+(e+r)}{\sqrt{e^2 + r^2}}, \quad (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{+(e - r)}{\sqrt{e^2 + r^2}}$$

wobei die Wurzeln mit dem Zeichen + zu nehmen sind; denn da in dem Integrale die Wurzelgrösse $\sqrt{1+k^2w}$ aus dem Ausdrucke für u herstammte und u eine absolute Grösse ist, so muss auch $\sqrt{1+k^2w}$, also auch dessen besonderer Werth für $w=-1$ d. h. $\sqrt{1-k^2}$ eine positive Grösse sein. Da aber überhaupt

$\sqrt{1-k^2}=\pm\frac{(e-r)}{\sqrt{e^2+r^2}}$ und $e>r$ (nach der Voraussetzung), so ist das Zeichen + zu nehmen.

Daher ist weiter

$$\frac{2}{k^2}\left[\sqrt{1+k^2}-\sqrt{1-k^2}\right]=\frac{2}{k^2}\cdot\frac{2r}{\sqrt{e^2+r^2}}=\frac{2}{2er}\cdot(e^2+r^2)\cdot\frac{2r}{\sqrt{e^2+r^2}}$$

$$=\frac{2}{e}\sqrt{e^2+r^2}$$

folglich

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dw}{\sqrt{1+k^2w}}=\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\cos\vartheta}}=\frac{2}{e}\sqrt{e^2+r^2}\ ,\ e>r$$

und also

$$V=\frac{2\pi\varrho r^2}{\sqrt{e^2+r^2}}\cdot\frac{2}{e}\cdot\sqrt{e^2+r^2}$$

oder

$$V=\frac{4\pi\varrho r^2}{e}$$

Da nun die Masse der Kugelfläche $M=4r^2\pi\varrho$ ist, so erhält man schliesslich, wenn man diese in V einführt,

$$V=\frac{M}{e}.$$

2) Es werde jetzt angenommen, der Punkt A liege im inneren Hohlraume der Kugelfläche; dann ist $e<r$. Die ganze eben durchgeführte Rechnung bleibt dann ungeändert bis zu dem Integrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dw}{\sqrt{1+k^2w}}=\frac{2}{k^2}\left[\sqrt{1+k^2}-\sqrt{1-k^2}\right]$$

Da nämlich $e<r$ ist, so ist von den beiden Vorzeichen von $\sqrt{1-k^2}$ das Zeichen — zu nehmen und zu setzen

$$\sqrt{1-k^2}=-\frac{e-r}{\sqrt{e^2+r^2}}=\frac{r-e}{\sqrt{e^2+r^2}}$$

Dadurch wird

$$\frac{2}{k^2}\left[\sqrt{1+k^2}-\sqrt{1-k^2}\right]=\frac{2}{k^2}\cdot\frac{2e}{\sqrt{e^2+r^2}}$$

$$=\frac{2}{2re}\cdot(e^2+r^2)\cdot\frac{2e}{\sqrt{e^2+r^2}}$$

$$=\frac{2}{r}\sqrt{e^2+r^2}$$

also

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dw}{\sqrt{1+k^2w}}=\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\cos\vartheta}}=\frac{2}{r}\sqrt{e^2+r^2}\ ,\ e<r$$

und folglich

$$V=4\pi\varrho r$$

Die Masse der Kugelfläche ist wieder

$$M=4r^2\pi\varrho$$

mithin

$$V=\frac{M}{r}.$$

3) Liegt endlich der Punkt A auf der Kugelfläche, so wird $e=r$, also $k=1$, mithin

$$\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\cos\vartheta}}=\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\cos\vartheta}}=\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{1}{2}\vartheta}=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\frac{1}{2}\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

$$=\sqrt{2}\left[ltg\tfrac{1}{4}\vartheta+C\right]_0^{\pi}=\sqrt{2}\,ltg\tfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot l(1)=0$$

also wird

$$V=0.$$

4) Aus den beiden Formeln für das Potential der Kugelfläche

$$V=\frac{M}{e}\ ,\ e>r$$

$$V=\frac{M}{r}\ ,\ e<r$$

welche für einen Punkt des äusseren resp. inneren Raumes gelten, lassen sich nun nachstehende Folgerungen ziehen.

(1) Das Potential eines äusseren Punktes ist direct proportional der anziehenden Masse M und umgehrt proportional der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der Kugel. Daher ist es ebenso gross,

als wenn die Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Eine hohle Kugelfläche zieht daher einen äusseren Punkt ebenso an, als wäre ihre Masse im Mittelpuukte angebracht.

(2) Soll das Potential einer Kugel in Bezug auf einen äusseren Punkt eine Constante v sein, so ist $\frac{M}{e} = v$, also $e = \frac{M}{v}$ d. h. alle Punkte des äussen Raumes, welche ein Potential $= v$ haben, liegen auf einer Kugelfläche, deren Radius $e = \frac{M}{v}$ ist. Es sind also die Niveauflächen für äussere Punkte Kugelflächen.

(3) Ziehen zwei solcher Kugelflächen von den Massen M und M', welche ganz ausser einander liegen, einen äusseren Punkt A, dessen Entfernungen von den Mittelpunkten resp. e und e' sind, gleichzeitig an, so sind die Potentiale

$$V = \frac{M}{e} \text{ und } V' = \frac{M'}{e'}$$

und es verhalten sich diese also direct wie die Massen und umgekehrt wie die Distanzen e und e'; nämlich es ist

$$V : V' = \frac{M}{e} : \frac{M'}{e'}$$

Sollen die Potentiale, also auch die Anziehungen, gleich sein, so muss

$$\frac{M}{e} = \frac{M'}{e'}$$

oder

$$e : e' = M : M'$$

sein, d. h. alle Punkte des äusseren Raumes, für welche diese Bedingung erfüllt ist, liegen so, dass das Verhältniss ihrer Abstände von den Mittelpunkten C, C' der beiden Kugeln constant und zwar gleich dem Verhältniss der Massen M und M' ist. Sie liegen daher nach einem bekannten geometrischen Satze auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Centrallinie beider Kugeln liegt und welche diese Centrale in 2 Punkten Q und Q' so schneidet, dass

$$QC : Q'C = QC' : Q'C' = M : M'$$

ist, d. h. so dass die Punkte Q, Q' ein conjugirtes Paar der 4 harmonischen Punkte C, C', Q, Q' sind. Um diese Kugel zu construiren, hat man nur nöthig, die Linie CC' in Q, Q' nach dem Verhältniss $M : M'$ zu theilen, der Halbirungspunkt der Strecke QQ' liefert den Mittelpunkt P der

gesuchten Kugel, und $PQ = PQ'$ ist ihr Radius. Diese Kugel wollen wir Potentialkugel der beiden gegebenen Kugeln nennen und darunter also den geometrischen Ort aller äusseren Punkte verstehen, welche in Bezug auf die beiden gegebenen Kugeln gleiche Potentiale haben.

(4) Sind drei Kugeln K, K', K'' gegeben, deren Massen M, M', M'' und deren Centra C, C', C'' sind, so haben die Kugelpaare KK', KK'', $K'K''$ jedes seine Potentialkugel. Wenn sich 2 dieser 3 Potialkugeln schneiden, so haben alle Punkte ihres Durchschnittkreises gleiche Potentiale in Bezug auf alle 3 Kugeln, mithin liegt dieser Kreis auch auf der dritten Potentialkugel, d. h. die 3 Potentialkugeln scheiden sich in einem und demselben Kreise.

Wenn zwei der Potentialkugeln sich berühren, d. h. wenn ihr Durchschnittskreis in einem Punkt zusammensinkt, so muss dieser Punkt auch auf der dritten Kugel liegen. Es ist ferner dies der einzige Punkt, welcher gleiches Potential in Bezug auf alle 3 Kugeln hat, daher ist er auch der einzige Punkt, welchen die dritte Kugel mit den beiden andern gemein hat, d. h. die dritte Kugel berührt die beiden andern in ihm.

(5) In Bezug auf die gegenseitige Lage der 3 Potentialkugeln sind verschiedene Fälle denkbar, entweder sie haben alle drei gar nichts mit einander gemein, oder sie berühren sich, oder endlich sie schneiden sich. Im Falle der Berührung kann auch eine von einer andern umschlossen werden. Das Eintreten des einen oder andern dieser Fälle hängt offenbar nur von den anziehenden Massen und der gegenseitigen Lage ihrer Centra ab.

(6) Bei vier Kugeln K^0, K', K'', K''' mit den Massen M, M', M'', M''' erhält man $\frac{4.3}{1.2} = 6$ Potentialkugeln. Da sich nun irgend drei dieser Kugeln in einem Kreise schneiden, so erhält man $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ solcher Kreise. Alle Punkte eines solchen Kreises haben gleiche Potentiale in Bezug auf 3 der 4 gegebenen Kugeln.

Bestimmt man nun die Potentialkugeln für K^0, K', K'', so hat ihr Durchschnittskreis gleiche Potentiale für alle drei Kugeln K^0, K', K''. Bestimmt man ferner die Potentialkugel für K'' und K''', so haben ihre beiden Durchschnittspunkte mit jenem Kreise gleiche Potentiale für alle 4 Kugel K^0, K', K'', K'''. Diese beiden Punkte

mögen die Potentialcentra der 4 Kugeln heissen. Bezeichnet man allgemein mit $K_{(n,p)}$ die Potentialkugel zweier Kugeln $K^{(n)}$ und $K^{(p)}$, so liegen die Potentialcentra also auf den Kugeln

$$K_{(0,1)},\ K_{(0,2)},\ K_{(1,2)},\ K_{(2,3)}$$

Ebenso haben die 4 Potentialkugeln

$$K_{(0,1)},\ K_{(0,2)},\ K_{(1,2)},\ K_{(1,3)},$$

zwei Potentialcentra gemein. Da aber diese auf $K_{(1,0)}$, $K_{(1,2)}$, $K_{(1,2)}$ liegen, so stimmen sie mit dem Potentialcentris der vorigen 4 Kugeln überein; also liegen diese auf den 5 Kugeln

$$K_{(0,1)},\ K_{(0,2)},\ K_{(1,2)},\ K_{(1,3)},\ K_{(2,3)}$$

Ebenso beweist man, dass sie auch auf der sechsten Potentialkugel liegen.

Hieraus folgt also, dass die 6 Potentialkugeln von 4 gegebenen Kugeln, wenn sich irgend 4 in 2 Potentialcentris schneiden alle durch diese beiden Punkte gehen müssen. Ferner folgt, dass die obigen 20 Kreise, welche die Punkte enthalten, die für je 3 der 4 Kugeln gleiche Potentiale haben, durch diese beiden Punkte gehen, also eine gemeinschaftliche Sehne haben, welche zugleich gemeinschaftliche Sehne der 6 Potentialkugeln ist.

(7) Das Potential eines äusseren Punktes A war

$$V = \frac{M}{e}$$

Bezieht man nun A auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem der x, y, z, dessen Ursprung im Mittelpunkte C der Kugel liegt, auf welcher die Masse M vertheilt ist, und sind seine Coordinaten x, y, z, so ist

$$e^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial x},\qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial y},\qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial e}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{x}{e},\qquad \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{y}{e},\qquad \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{z}{e}$$

mithin die Resultante der Anziehung

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \pm\frac{\partial V}{\partial e}\sqrt{\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2} + \frac{z^2}{e^2}}$$

$$= \pm\frac{\partial V}{\partial e}\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{e^2}} = \pm\frac{\partial V}{\partial e}$$

Nun folgt aber aus

$$V = \frac{M}{e}$$

$$\frac{\partial V}{\partial e} = -\frac{M}{e^2}$$

also ist

$$R = \pm \frac{M}{e^2},$$

wo + für die Anziehung, — für die Abstossung gilt.

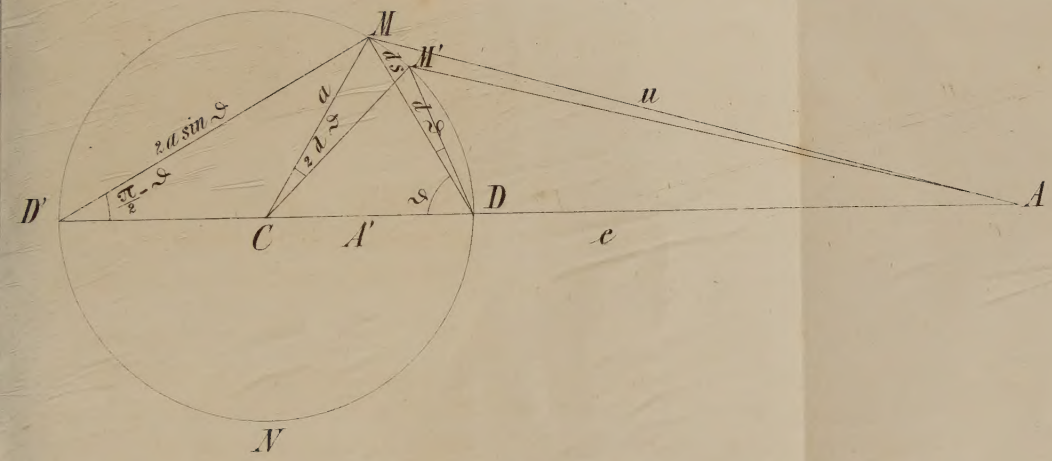
(8) Für einen inneren Punkt war das Potential

$$V = \frac{M}{r}$$

Es ist diese Grösse ganz unabhängig von e, der Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkte der Kugel, d. h. es ist V nach e constant. Wo sich dieser Punkt auch im Innern befinden mag, immer hat die Kugel in Bezug auf ihn dasselbe Potential. Es ist ferner also

$$\frac{\partial V}{\partial e} = R = 0,$$

d. h. ein in innern Raume einer Hohlkugel liegender Punkt befindet sich in jeder Lage im Gleichgewicht. Diesen Satz hat schon *Newton* auf rein geometrischem Wege bewiesen.


M
M'
u
D'
D
A
C
A'
e
N